ติว SUM

เตรียมอุดมศึกษา

ม.4 เทอม 2

By P’Donut ALevel

tcdonut

@tcdonut.official

เลขเด็ด By OnDemand

ติว SUM เตรียมอุดมฯ ม.4 เทอม 2 (TU87)

1. กำหนดเส้นตรง L_1 ผ่านจุดกึ่งกลางของจุด $A(8, 7)$ กับ $B(-2, -3)$ และตัดแกน y ที่จุด $(0, 8)$ ถ้าเส้นตรง L_2 ผ่านจุดตัดของเส้นตรง $2x + y = 10$ กับ $4x + y = 16$ และตั้งฉากกับเส้นตรง L_1 ที่จุด (p, q) จงหาค่า $q - p$

L_1 ผ่าน $\left(\frac{8-2}{2}, \frac{7-3}{2}\right) = (3, 2)$, $(0, 8)$

$m = \frac{8-2}{0-3} = -2$

$\therefore \boxed{y = -2x + 8}$

ตั้งฉาก

L_2 ผ่าน $(3,4)$, ความชัน $= \frac{1}{2}$

$\therefore \boxed{y - 4 = \frac{1}{2}(x-3)}$

แก้สมการหาจุดตัด

$2x + y = 10$ —①

$4x + y = 16$ —②

②−①; $2x = 6$ $\therefore x = 3$

แทน x ใน ①; $y = 4$

แทน L_1 ใน L_2;

$-2x + 4 = \frac{1}{2}(x-3)$

$-4x + 8 = x - 3$

$x = \frac{11}{5}$

แทน x ใน L_1;

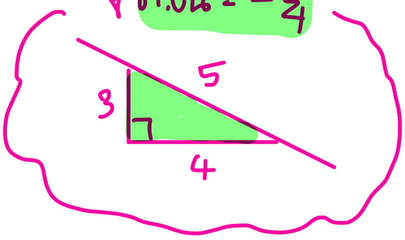
$y = \frac{18}{5}$

$\therefore q - p = \boxed{\frac{7}{5}}$ #

2. กำหนดให้ $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ เป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรง $3x + 4y - 6 = 0$ โดยที่ส่วนของเส้นตรง AB มีความยาวเท่ากับ 25 หน่วย และ $x_1 > x_2$ ถ้า C เป็นจุดตัดแกน X ของเส้นตรงดังกล่าวซึ่งอยู่ระหว่างจุด A กับ B และทำให้ $\boxed{AC:BC = 3:2}$ จงหาค่าของ $x_1 + x_2 + y_1 + y_2$

$+\frac{3}{2}$

ความชัน $= -\frac{3}{4}$



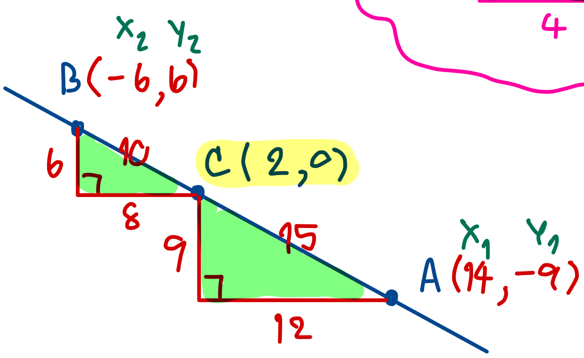
$AC = 15, BC = 10$

จุดตัดแกน x $(y=0)$

$3x + 4(0) - 6 = 0$

$x = 2$

$\therefore$ พิกัด $C(2,0)$



$\therefore x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = \boxed{5}$ #

3. กำหนดให้เส้นตรง L_1 มีความชันเป็นจำนวนเต็ม ผ่านจุด (2, 12) และตัดแกน X และแกน Y ที่จุด A และ T ตามลำดับ โดยที่ผลบวกของระยะตัดแกน X กับระยะตัดแกน Y เท่ากับ 3 ให้ L_2 เป็นเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง L_1 และผ่านจุด (0, -13) ถ้าจุด P เป็นจุดบนเส้นตรง L_2 ที่ทำให้ $PA:PT = 1:2$ จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม APT

L_1; $\boxed{y-12=m(x-2)}$ ⟶ $y-12=4(x-2)$

$4x-y+4=0$

$(y=0)$ ระยะตัดแกน x

$-12=m(x-2)$

$x=\boxed{-\frac{12}{m}+2}=-1$

$(x=0)$ ระยะตัดแกน y

$y-12=m(-2)$

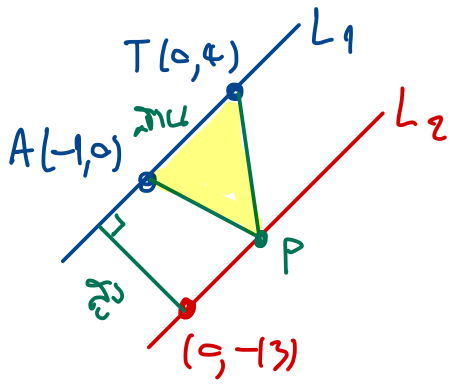
$y=\boxed{12-2m}=4$

$\therefore -\frac{12}{m}+2+12-2m=3$

$2m^2-11m+12=0$

$(m-4)(2m-3)=0$

$m=4,\ \cancel{\frac{3}{2}}$



$\therefore$ พ.ท. $=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{17}\cdot\frac{17}{\sqrt{17}}=\boxed{\frac{17}{2}}$ #

4. กำหนดให้ P เป็นจุดที่อยู่ห่างจากจุด $A(0,1)$, $B(-1,-6)$ และ $C(-8,-5)$ เป็นระยะทางเท่ากัน จงหาสมการเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง BP (ตอบในรูปของ $ax+by+c=0$)

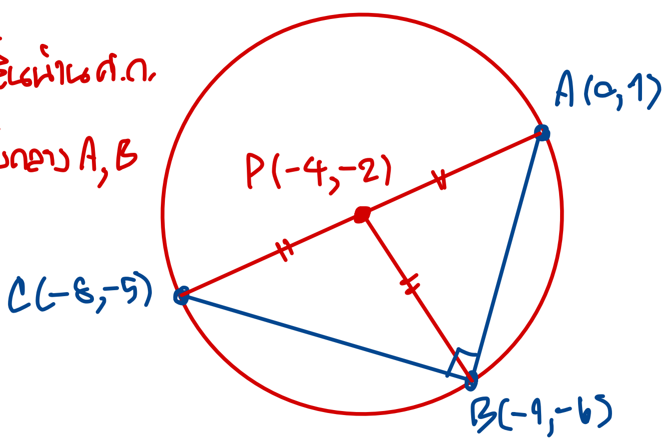
♥ P เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$

$m_{AB}=\frac{-6-1}{-1-0}=7$, $m_{BC}=\frac{-6+5}{-1+8}=-\frac{1}{7}$

$\therefore m_{AB}\times m_{BC}=-1 \Rightarrow AB\perp BC$

♥ AB เป็นเส้นผ่านศ.ก.

P เป็นจุดกึ่งกลาง A, B



เส้นตรงผ่าน $\left(\frac{-4-1}{2},\frac{-2-6}{2}\right)$

$=\left(-\frac{5}{2},-4\right)$

$m_{BP}=-\frac{4}{3}$; ก.ฉ. $=\frac{3}{4}$

$\therefore y+4=\frac{3}{4}\left(x+\frac{5}{2}\right)$

$8y+32=6x+15$

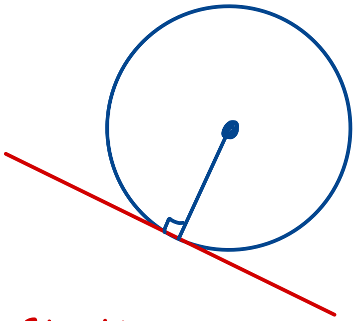
$\boxed{6x-8y-17=0}$ #

แก้โจทย์ เต็ม

5. กำหนดให้ k เป็นจำนวน~~จริง~~ที่ทำให้วงกลม $x^2+y^2-4x+ky-20=0$ สัมผัสกับเส้นตรง $3x+4y-27=0$ จงหาความยาวของเส้นรอบวง

$(x-2)^2+(y+\frac{k}{2})^2=24+\frac{k^2}{4}$

ศ.ก. $(2,-\frac{k}{2})$, $r=\sqrt{24+\frac{k^2}{4}}$



$3x+4y-27=0$

r

$\frac{|3(2)+4(-\frac{k}{2})-27|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{24+\frac{k^2}{4}}$

$\frac{|-2k-21|}{5}=\sqrt{24+\frac{k^2}{4}}$

$\frac{4k^2+84k+441}{25}=24+\frac{k^2}{4}$

$16k^2+336k+1764=2400+25k^2$

$9k^2-336k+636=0$

$3k^2-112k+212=0$

$(k-2)(3k-106)=0$

$k=2$, $\cancel{\frac{106}{3}}$; $r=5$ $\therefore 2\pi r=\boxed{10\pi}$ #

6. จงหาโดเมนและเรนจ์ของ $r=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid 4xy-(6-x)y^2=4\}$

หา D_r $(x-6)y^2+(4x)y-4=0$

กรณี 1 $x=6$; $24y-4=0$ หา y ได้

กรณี 2 $x\neq 6$; $b^2-4ac\geq 0$

$(\cancel{4}x)^2-\cancel{4}(x-6)(-\cancel{4})\geq 0$

$x^2+x-6\geq 0$

$(x-2)(x+3)\geq 0$

$x\leq -3, x\geq 2$

$\therefore \boxed{D_r=(-\infty,-3]\cup[2,\infty)}$ #

หา R_r $4xy+xy^2=6y^2+4$

$x=\frac{6y^2+4}{y^2+4y}$

ตัวส่วน $\neq 0$; $y^2+4y\neq 0$

$y(y+4)\neq 0$

$y\neq 0,-4$

$\therefore \boxed{R_r=\mathbb{R}-\{0,-4\}}$ #

7. กำหนดให้ $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - \sqrt{x}\sqrt{y} + y = 2024\}$
และ $r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid x^2 - xy + y^2 = 3\}$
จงหาจำนวนสมาชิกของ $D_{r_2} - R_{r_1}$

$\boxed{R_{r_1}}$ $(\sqrt{x})^2 - \sqrt{y}(\sqrt{x}) + y - 2024 = 0$

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{y} \pm \sqrt{y - 4(y - 2024)}}{2}$$

พิจารณากรณี

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{y} + \sqrt{8096 - 3y}}{2}$$

$y \geq 0$ $\quad$ $8096 - 3y \geq 0$

$\therefore \boxed{R_{r_1} = [0, \frac{8096}{3}]}$

$\boxed{D_{r_2}}$ $y^2 - xy + x^2 - 3 = 0$

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4(x^2 - 3)}}{2}$$

$$= \frac{x \pm \sqrt{12 - 3x^2}}{2}$$

$12 - 3x^2 \geq 0$

$-2 \leq x \leq 2$

Check! $(x, y) \in I \times I$

$\therefore \boxed{D_{r_2} = \{-2, -1, 1, 2\}}$

$\therefore n(D_{r_2} - R_{r_1}) = \boxed{2}$ #

8. กำหนดให้ $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sqrt{x+1} + |y^2 + 4y + 3| = 4\sqrt{2}\}$ และ
$r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \sqrt{|x| - 4}}}\}$ จงหา $D_{r_1} \cap D_{r_2}$

หา D_{r_1} $\quad \underbrace{|(y+2)^2 - 1|} = 4\sqrt{2} - \sqrt{x+1} \geq 0$

$\because (y+2)^2 \geq 0$

$(y+2)^2 - 1 \geq -1$

$|(y+2)^2 - 1| \geq 0$

$4\sqrt{2} \geq \sqrt{x+1}$

$32 \geq x + 1$

$-1 \leq x \leq 31$

$\therefore D_{r_1} = [-1, 31]$

หา D_{r_2} $\quad |x| - 4 \geq 0$

$1 - \sqrt{|x| - 4} \geq 0$

$1 - \sqrt{1 - \sqrt{|x| - 4}} \neq 0$

$4 < |x| \leq 5$

$\therefore D_{r_2} = [-5, -4) \cup (4, 5]$

$\therefore D_{r_1} \cap D_{r_2} = \boxed{(4, 5]}$ #

9. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = \frac{x-1}{\sqrt{x+5}}$ และ $x > 2\}$ จงหา r^{-1}
(ตอบในรูปของ $r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = \ldots\}$)

อินเวอร์ส $x = \frac{y-1}{\sqrt{y+5}}$ และ $y > 2$

$$x^2(y+5) = (y-1)^2$$
$$x^2y + 5x^2 = y^2 - 2y + 1$$
$$y^2 - (x^2+2)y + (1-5x^2) = 0$$
$$\boxed{y = \frac{x^2+2 \pm \sqrt{(x^2+2)^2 - 4(1-5x^2)}}{2}}$$

กรณี 1 $\frac{x^2+2+\sqrt{x^4+24x^2}}{2} > 2$

$\sqrt{x^4+24x^2} > 2 - x^2$

$x^4 + 24x^2 > 4 - 4x^2 + x^4$

$x^2 > \frac{1}{7}$; $\boxed{x > \frac{\sqrt{7}}{7}}$

กรณี 2 $\frac{x^2+2-\sqrt{x^4+24x^2}}{2} > 2$

$x^2 - 2 > \sqrt{x^4+24x^2}$; $x^2 < \frac{1}{7}$

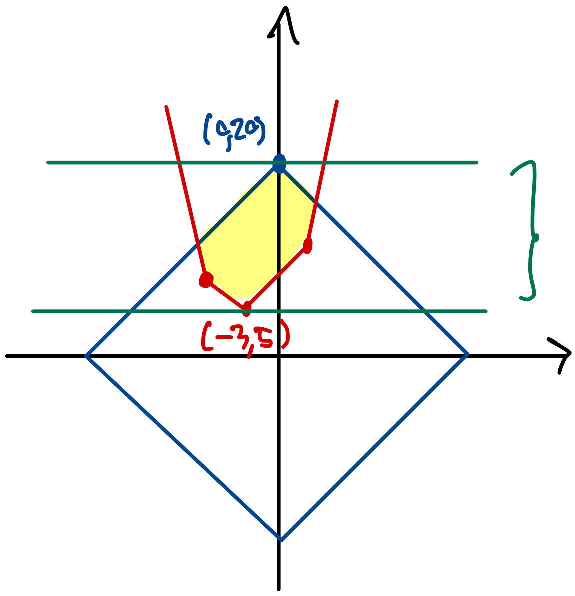
ขัดแย้ง!

$$\boxed{r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y = \frac{x^2+2+\sqrt{x^4+24x^2}}{2} \text{ และ } x > \frac{\sqrt{7}}{7}\}}$$ #

10. กำหนดให้ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid |x|+|y| \leqslant 20$ และ $y \geqslant |x+4|+|x+3|+|x-1|\}$ จงหา $D_{r^{-1}}$

$x = -4$ $x = -3$ $x = 1$

$y = 6$ $y = 5$ $y = 9$



$\therefore D_{r^{-1}} = R_r = \boxed{[5, 20]}$ #